Le calcul littéral

1. Utilisation d'expressions littérales

Une expression est littérale lorsque des nombres sont représentés par des lettres.
On a déjà utilisé des lettres pour :

- énoncer une formule :

Plutôt que d'écrire : " La longueur d'un cercle est égale au produit de π par le diamètre du cercle.", on donne une formule littérale : $L = 2\pi R = \pi D$

- décrire une règle de calcul :

$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$ permet de traduire simplement la règle qu'il faudrait énoncer ainsi : "La somme de deux fractions de même dénominateur est égale à la fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs et dont le dénominateur est le dénominateur commun."

- désigner un nombre inconnu dans les équations :

Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à 8,4 cm. Quelle est la longueur des deux côtés égaux si le troisième côté mesure 5 cm?
On appelle l la longueur du côté cherché.
On peut écrire : $2 \times l + 5 = 8{,}4$.

. Exprimer "en fonction de":

Exprimer l'aire du disque en fonction du rayon R : $A = \pi R^2$.
Exprimer l'aire du disque en fonction du diamètre D : étant donné que R est la moitié de D, on peut écrire :
$$A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi\frac{D}{2}\times\frac{D}{2} = \pi\frac{D^2}{4}$$

2. Deux types de lettres utilisées.

Si une lettre représente un nombre qui peut prendre une valeur quelconque dans un ensemble de nombres, on dit que c'est une **variable**.
Si au contraire, la valeur attribuée à la lettre est connue et toujours la même, on dit que c'est une **constante.**

Exemple : Dans la formule de calcul de l'aire d'un disque, $A = \pi R^2$
R (rayon) est une variable, valeur quelconque dans les décimaux positifs.
π est une constante : sa valeur ne change pas, ce n'est que l'arrondi que l'on choisit qui peut varier suivant les problèmes et la précision souhaitée.

3. Les écritures littérales déjà rencontrées.

Si a et b désignent deux nombres :

a + b désigne leur somme — ab leur produit

$\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$: leur quotient — a^2 ; b^2 : leurs carrés

-a et -b : leurs opposés — $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: leurs inverses

D'autres écritures que l'on peut décrire :

2a	double de a
a/2	moitié de a
2n avec n entier	un nombre pair
2n+1 avec n entier	un nombre impair
$(a + b)^2$	le carré de la somme de a et de b
$a^2 + b^2$	la somme des carrés de a et de b

4. Conventions d'écritures dans les produits

Afin d'alléger les écritures, on <u>convient des règles suivantes :</u>

♦ Le signe de la multiplication ($\times$) disparaît ou est remplacé par un point :

- entre deux lettres : $a \times b$ s'écrit ab
- entre un nombre et une lettre : $3 \times a$ ou $a \times 3$ s'écrit $3a$
- entre des nombres, des lettres et des parenthèses : $4 \times a \times (2x + 1)$ s'écrit $4a(2x+1)$

♦ Les facteurs s'écrivent dans l'ordre suivant :

1. Les nombres
2. Les lettres et dans l'ordre alphabétique
3. Les parenthèses

$a \times 2 \times b$ s'écrit **$2ab$** ;

$a \times (x + 2) \times (-5) \times b$ s'écrit **$-5ab(x + 2)$**

♦ On conserve les parenthèses et le signe $\times$ dans certains cas :

$5 \times (-8)$: des parenthèses pour séparer $\times$ et $-$

4×35 : sans le signe $\times$ on lirait 435

♦ $1 \times a$ s'écrit a ; $(-1) \times a$ s'écrit $(-a)$; $\frac{a}{1}$ s'écrit a

5. Simplifications d'écriture des sommes algébriques

Une somme algébrique est une suite d'additions de termes littéraux ou numériques relatifs.
Par exemple, l'expression : $E = 5 + a + 2b - 2 + 3a - b - 7 + 5a + 10a$
Elle comporte trois sortes de termes :

* Les quatre termes exprimant <u>un nombre de a :</u> $+a$; $+3a$; $+5a$; $+10a$
* Les deux termes exprimant <u>un nombre de b :</u> $+2b$ et $-b$
* Les trois termes <u>numériques :</u> 5 ; -2 ; -7

<u>Simplifier ou réduire</u> l'écriture de l'expression E, c'est compter ensemble les termes de même nature afin d'en éviter la répétition.

$+a + 3a + 5a + 10a = 19a$; $+2b - b = b$; $5 - 2 - 7 = -4$

D'où <u>l'écriture réduite ou simplifiée de E :</u> **<u>$E = 19a + b - 4$</u>**

<u>Attention !</u> : Ce n'est que l'écriture qui est réduite, mais pas la valeur de l'expression. On opère des transformations dans la présentation.
Si on attribue une valeur particulière à chacune des variables a et b, la valeur de l'expression E sera identique quelle que soit la forme présentée. C'est même un bon moyen de vérifier qu'il n'y a pas eu d'erreur au cours des transformations.

6. Les différents cas de suppression des parenthèses.

Supprimer des parenthèses est souvent appelé "<u>développer</u>".

a) <u>Dans une somme</u>

$a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a + (b - c) = a + b - c$

Une parenthèse précédée du signe + est "neutre".

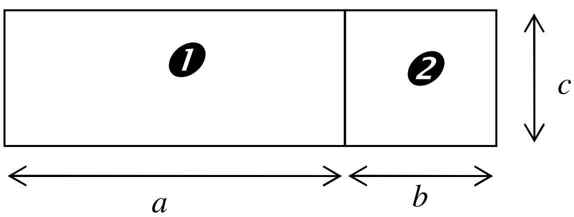
$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a - (-b + c) = a + b - c$

Si une parenthèse est précédée du signe – , on supprime le signe – et les parenthèses en changeant chacun des termes de la parenthèse en son opposé.

b) <u>Dans un produit</u>



Pour calculer l'aire totale du grand rectangle formé par les deux rectangles 1 et 2, il y a deux manières possibles :

Première manière	Deuxième manière
On calcule l'aire d'un seul rectangle dont les dimensions sont :	On calcule la somme des aires des deux rectangles :
c et (a + b)	Rectangle ❶ : $c \times a$ Rectangle ❷ : $b \times c$
$\mathbf{c \times (a + b)}$	$\mathbf{c \times a + b \times c}$

Les deux calculs permettant de calculer la même aire, les deux écritures sont équivalentes.
La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction. Quels que soient les nombres a, b et c, on a :

$a(b + c) = ab + ac$ $\qquad$ $a(b - c) = ab - ac$

Ce que l'on peut généraliser par :

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad. \qquad ❶$$
$$ab + ac - ad =. a(b + c - d) \qquad ❷$$

L'égalité ❶ permet de transformer l'écriture d'un produit en une somme.(**Développement**)
L'égalité ❷ permet de transformer l'écriture d'une somme en un produit.(**Factorisation**)

La même expression peut donc avoir deux formes :
Forme factorisée ou produit : a (b + c - d)
Forme développée ou somme : ab + ac - ad

Exemples :
2 (a + 5) = 2a + 10 $\qquad$ - 3 (b - 8) = - 3b + 24

c) **Dans un quotient**

La barre de fraction joue le rôle de parenthèses (priorité au quotient)

$$\frac{8x+2}{2} = \frac{8x}{2} + \frac{2}{2} = 4x + 1$$
$$\frac{16a-3}{8} = \frac{16a}{8} - \frac{3}{8} = 2a - \frac{3}{8}$$
$$\frac{11+3x}{5} = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x$$

d) **Produit de deux sommes**

L'aire du rectangle peut être calculée de deux manières qui sont équivalentes, donc

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$